# Estimation *a posteriori* de type résidu pour une méthode multi-échelles appliquée au problème de diffusion.

K. Ould Ahmed Ould Blal (1), A. Lozinski (2), Z. Mghazli (1).

1 *LIRNE-EIMA, Université Ibn Tofaïl, Faculté des Sciences B.P. 133 Kenitra, MAROC*

2 *(LMB)- Laboratoire de Mathématiques de Besançon-UMR 6623 CNRS, 16, Route Gray, 2500 Besançon-France*

*Corresponding author : kh.ouldahmed@gmail.com

**Résumé:** Nous introduisons la méthode des éléments finis multi-échelles pour le problème de diffusion (voir [2]) et nous proposons de donner les estimations *a postriori* en vue d'une adaptation de maillage. Nous distinguons dans ces estimations deux sources d'erreur: l'un lié au maillage grossier et l'autre relatif aux maillages fins utilisés pour construire les fonctions de base multi-échelles sur chaque cellule du maillage grossier. Ces indicateurs d'erreur nous permettent d'effectuer une adaptation des deux maillages (grossier et fin) pour obtenir une approximation plus précise au moindre coût. La méthode des élément finis multi-échelles (MsFEM) a été introduite dans un premier temps par T.Hou et X.H Wu (voir [3] et [4]) pour étudier les problèmes elliptiques à cœfficients fortement oscillants des matériaux composites ou des milieux poreux. L'idée principale de MsFEM provient d'un travail de Babuska et Osborn (voir [1]). Son objectif est de capturer la structure multi-échelles de la solution via des fonctions de base locales. Ces dernières contiennent l'information essentielle des petites échelles, MsFEM permet de recouvrir l'information locale en s'adaptant aux caractéristiques spéciales des échelles, ce qui fait d'elle un outil puissant.

Soit $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ et considérons le problème de diffusion associé à l'opérateur $Lv := -\text{div } (\nu\nabla v)$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbb{V}, \\ a(u,v) = \aleph(v), \ \forall \ v \in \mathbb{V} \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathbb{V} = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nu\nabla u \cdot \nabla v dx$, $\aleph(v) = \displaystyle\int_\Omega f v dx \ \forall \ u, v \in \mathbb{V}$, $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\nu \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$ vérifiant:

$$\forall x \in \Omega, \quad \nu(x) \geq \nu_{min} > 0.$$

Notons par $\|\cdot\|_{\nu,\Omega}$ la norme énergie définie par

$$\|v\|^2_{\nu,\Omega} := \int_\Omega \nu|\nabla u|^2 dx.$$

La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ étant continue et $\mathbb{V}$-elliptique et la forme linéaire $L$ étant continue pour cette norme, l'existence et l'unicité de la solution de (1) sont assurées par le théorème de Lax-Milgram.
Soit $\mathcal{T}_H$ une triangulation régulière de $\Omega$ en triangles ou rectangles $K$:

$$\Omega = \bigcup_{K\in\mathcal{T}_H} K.$$

Notons $H_K$ le diamètre de l'élément K, $H = \max_K H_K$, $\mathcal{N}_H$ l'ensemble des noeuds intérieurs de $\mathcal{T}_H$, $\mathcal{E}_H$ l'ensemble des arêtes des éléments $K \in \mathcal{T}_H$, $\mathbb{P}_1(E)$ l'espace des fonctions polynomiales de degrés $\leq 1$ sur $E \in \mathcal{E}_H$.
La méthode d'approximation proposée est basée sur deux ingrédients principaux: la construction des

fonctions de base multi-échelles $((\Phi^i_H)_{1\leq \mathcal{N}_H})$ et une formulation variationnelle couplant ces fonctions et fournissant une approximation précise de la solution. Les fonctions de base multi-échelles sont conçues pour saisir les caractéristiques multi-échelle de la solution et contiennent des informations sur les petites échelles. Elles sont construites à partir de celles des éléments finis standards $(\psi^i,\ i=1,...,\mathcal{N}_H)$ dans un maillage grossier $\mathcal{T}_H$ de telle manière qu'elles aient le même support et coïncident avec elles sur la frontière de chaque élément de ce support et vérifient l'équation $L\Phi_H = 0$ sur chaque maille grossière. L'approximation de ces fonctions $((\Phi^i_{H,h})_{1\leq \mathcal{N}_H})$ est faite dans $\mathbb{P}^1$ en considérant un maillage fin $\mathcal{T}_h(K)$ dans chaque $K \in \mathcal{T}_H$. La solution globale est maintenant cherchée dans l'espace engendré par ces fonctions de base. Des estimations a priori de l'erreur d'approximation pour ce type de résolution sont traitées dans [2].

Nous introduisons l'espace multi-échelles continue et l'espaces multi-échelles discret:
$\mathbb{V}_H = Vect\left\{\Phi^i_H,\ i=1,...,\mathcal{N}_H\right\}$ et $\mathbb{V}^h_H = Vect\left\{\Phi^i_{H,h},\ i=1,...,\mathcal{N}_H\right\}$. Dans le but de développer des estimateurs a posteriori de type résidu, nous introduisons des opérateurs d'interpolations de type clément, vérifiant les bonnes estimations. Les opérateurs utilisés ici sont définis par

$$A_H(v) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_H}\left(\frac{1}{\omega_i}\int_{\omega_i} v dx\right)\Phi^i_H \quad \text{et} \quad A^h_H(v) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_H}\left(\frac{1}{\omega_i}\int_{\omega_i} v dx\right)\Phi^i_{H,h}$$

où $\mathcal{N}_H$ est le nombre de fonctions de base multi-échelles, et $\omega_i$ est le support la $i$ème fonction de base multi-échelles.
Considérons le maillage grossier $\mathcal{T}_H$ une première estimation est donnée sur l'erreur commise en approchant $u$ par $u_H$

**Théorème 1** *Soit $u_H \in \mathbb{V}_H$ est une approximation $u$. Pour $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, alors nous avons la borne supérieure de l'erreur:*

$$\|u-u_H\|_\nu \preceq \left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_H}\eta^2_K + \alpha_K\|f-f_K\|^2_{0,K}\right\}^{1/2} \tag{2}$$

.

$$\eta_K \preceq C\left\{\sum_{K\in\mathcal{T}_H}\left(\alpha_K\left\|f-f_K\right\|^2_{\mathbb{L}^2(K)} + \beta_K\left\|u-u_H\right\|^2_{\nu;K}\right)\right\}^{1/2} \tag{3}$$

Une estimation de l'erreur commise en approchant $u$ par $u^h_H$ est donnée par:

**Théorème 2** *Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $u^h_H$ est une approximation de $u$. Nous avons*

$$\begin{aligned}\left\|u-u^h_H\right\|_\nu \preceq\ & \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_H} I^K_f + \alpha_K\left\|f-f_K\right\|^2_{0,T}\right)^{1/2} + \left(\sum_{E\in\mathcal{E}_H} I^K_E\right)^{1/2} \\ & + \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_H} I^T_e\right)^{1/2} + \left(\sum_{E\in\mathcal{E}_H} I^K_{ET}\right)^{1/2} + \left(\sum_{E\in\mathcal{E}_H} I^K_{Te}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

*où $I^K_f$ est l'indicateur lié à la donnée $f$ du problème, $I^K_E$ est l'indicateur sur les arêtes du cellule grossier $K$, $I^T_e$ est l'indicateur sur les triangles du maillage fin qui sont à l'intérieur du triangle grossier $K$ et qui ne touchent pas le bord de ce triangle, $I^K_{ET}$ est le résidu sur les triangles du maillage fin qui touchent les arêtes du triangle grossier $K$ et $I^K_{Te}$ est l'indicateur sur les arêtes du maillage fin qui touchent le bord du triangle grossier $K$.*

Nous montrons que les estimateurs de l'erreur *a posteriori* permettront de détecter les endroits dont la solution MsFEM est moins bien calculée. Ces estimateurs montrent que l'erreur est relativement grande sur les arêtes du maillage grossier. Ceci est dû aux conditions limites imposées pour calculer les fonctions de base multi-échelles. Les adaptations des maillages que nous réalisons nous permettent d'avoir une meilleure approximation de la solution et montrent que l'adaptation du maillage grossier est un outil puissant pour avoir une équidistributivité de l'erreur.

**Mots-clefs : Elements Finis, Element finis multi-échelle, estimation a postriori, indicateurs d'erreurs**

## Références

[1] I. Babuska, J. E. Osborn. Generalized finite element methods : their performance and their relation to mixed methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 (1983),pp. 510-536.

[2] L. Carballal Perdiz. *"Etude d'une méthodologie multi-échelles appliquée à différents problèmes en milieu continu et discret."* Thèse, Université Toulouse III - Paul Sabatier., le 03/12/2010.

[3] T.Y. Hou and X.H. Wu., *A Multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media.*, J. Comput. Phys., 134:169-189, 1997.

[4] T. Y. Hou, *Multiscale computations for ow and transport in porous media, in Multi-scale phenomena in complex fluids*, vol. 12 of Ser. Contemp. Appl. Math. CAM, World Sci. Publishing, Singapore, 2009, pp. 175-285..