
Flows of two immiscible fluids over an obstacle.*

C. TITRI-BOUADJENAK · D. E. TENIOU

Abstract

In this paper, we consider superposed flows of two immiscible fluids with respective densities $\rho_1 > \rho_2$, in a channel of finite depth, with an obstacle lying on its bottom. Asymptotically upstream and downstream the flows are uniform, with respective velocities $(u_1, 0)$ and $(u_2, 0)$ and the free boundary (fluid-air) as well as the interface (separating the two fluids) are flat. But near the obstacle a perturbation appears. Each flow is irrotational, stationary and the fluids are ideal and incompressible. We take gravity into account and we neglect the effects of superficial tension. The problem is formulated in $2D$, using nonlinear equations defined on the free surface and on the interface (derived from Bernoulli's equation). The unknowns are the velocities fields \vec{U}_1, \vec{U}_2 and the scalar functions γ_1, γ_2 representing respectively the perturbations of the free boundary and the interface. A result of existence and uniqueness is given in Banach algebras by using the implicit functions theorem. The originality of our model consists of considering two fluids. So we are challenged by three difficulties: a nonlinear coupled equation on the interface, a nonlinear equation on the free boundary and a free boundary which is itself an unknown of the problem.

Keywords Free boundary · interface · immiscible fluids · Bernoulli's equation · stationary flow.

Mathematics Subject Classification (2000) 35R35 · 76B07.

*This work has been supported by the laboratory AMNEDP of U.S.T.H.B and the Project ARCUS-CERES (MAEE/Région PACA/Algérie-Maroc-Tunisie-Turquie, CERES Contribution à la Construction de l'Espace euro-méditerranéen de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur).

C. TITRI-BOUADJENAK

Laboratoire AMNEDP, Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B, BP N° 32, El Alia Bab-Ezzouar, Alger, ALGERIE.

Tel.: +213-20-368053

Fax: +213-21-247907

E-mail: chahrazadt@gmail.com

D. E. TENIOU

Laboratoire AMNEDP, Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B, BP N° 32, El Alia Bab-Ezzouar, Alger, ALGERIE.

Tel.: +213-20-368053

Fax: +213-21-247907

E-mail: deteniou@usthb.dz

Résumé

Ce travail consiste en une étude théorique du mouvement de deux fluides immiscibles superposés dans un canal de profondeur finie. Nous supposons que les deux fluides sont parfaits, de densités respectives $\rho_1 > \rho_2$ et que leurs mouvements sont irrotationnels, bidimensionnels, stationnaires et uniformes à l'infini (en amont et en aval) avec des vitesses respectives $(u_1, 0), (u_2, 0)$.

Nous tenons compte de la force de gravité tandis que les effets de tension superficielle sont négligés. Le fond du canal est plat partout sauf sur une partie bornée, où se trouve un obstacle. Nous nous intéressons à l'effet de cet obstacle sur l'interface (surface de séparation entre les deux fluides) qui se trouve à une hauteur fixe H_1 du fond lorsque le mouvement est uniforme, ainsi qu'à l'effet de cet obstacle sur la frontière libre (surface de séparation air-fluide) qui se trouve à une hauteur fixe H_2 du premier fluide lorsque le mouvement est uniforme.

Plus précisément, en faisant l'hypothèse que l'obstacle est "assez petit", nous formulons le problème en $2D$ à l'aide des équations d'Euler et de l'équation de Bernoulli. Trois difficultés apparaissent alors : une équation non-linéaire et couplée sur l'interface, une seconde équation non-linéaire sur la surface libre et cette dernière (ainsi que l'interface) qui est une inconnue du problème. Les inconnues principales sont les fonctions scalaires γ_1 et γ_2 , qui représentent les perturbations respectives de l'interface et de la frontière libre ainsi que les champs de vitesses \vec{U}_1 et \vec{U}_2 des écoulements.

Nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème des fonctions implicites sur des espaces de Banach appropriés, qui assurent de surcroît le comportement asymptotique de la solution.

Mots clés : Surface libre. Interface. Fluides immiscibles. Equation de Bernoulli. Ecoulement stationnaire.

Classification (2000) : 35R35 76B07.